第22講　曲線の長さ，速度と道のり
PART1　曲線の長さ

要点整理と公式

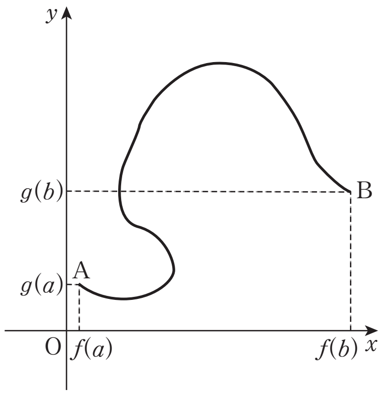
要点① 媒介変数表示された曲線の長さ

座標平面上の曲線が，媒介変数 t を用いて

$$x=f(t),\ y=g(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

と表されるとき，曲線の長さ L を求める。

$A(f(a),\ g(a))$，$B(f(b),\ g(b))$ とし，点 A から点 $P(f(t),\ g(t))$ までの曲線の長さを $s(t)$ と表す。



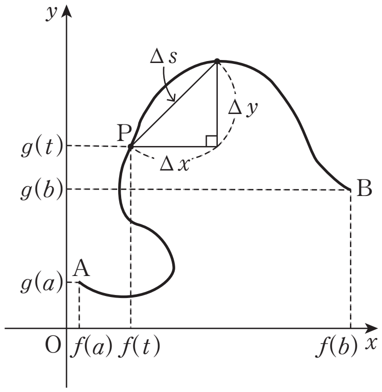
t の増分 Δt に対する x，y の増分を Δx，Δy とすると，Δt が十分小さい正の値のとき，$s(t)$ の増分 Δs は

$$\Delta s \fallingdotseq \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$$

と考えることができる。よって

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \fallingdotseq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2+\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$\Delta t \to 0$ のとき，$\dfrac{\Delta x}{\Delta t} \to \dfrac{dx}{dt}$，$\dfrac{\Delta y}{\Delta t} \to \dfrac{dy}{dt}$ であるから



$$\frac{ds}{dt}=\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}$$

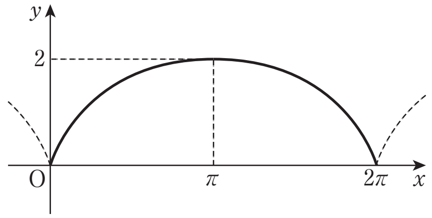
よって，$s(t)$ は t の関数 $\sqrt{(f'(t))^2+(g'(t))^2}$ の不定積分の1つであるから，点 A から点 B までの曲線の長さ L は，定積分を用いて次のように表される。

媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ 　$(a \leqq t \leqq b)$ の長さを L とすると

$$L=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b \sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

(ex) サイクロイド $x=t-\sin t$，$y=1-\cos t$　$(0 \leqq t \leqq 2\pi)$の長さ L を求める。



$\dfrac{dx}{dt}=1-\cos t$，$\dfrac{dy}{dt}=\sin t$ より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(1-\cos t)^2+\sin^2 t$$
$$=2-2\cos t=2(1-\cos t)$$
$$=4\cdot\frac{1-\cos t}{2}=4\sin^2\frac{t}{2}$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt$$

$0 \leqq \dfrac{t}{2} \leqq \pi$ より $\sin\dfrac{t}{2} \geqq 0$　　よって　$L=\displaystyle\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}dt=2\left[-2\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8$

要点② 曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線の方程式が $y=f(x)$　$(a \leqq x \leqq b)$で表されているときの曲線の長さ L は

$x=$　，$y=f($　$)$　　$(a \leqq t \leqq b)$

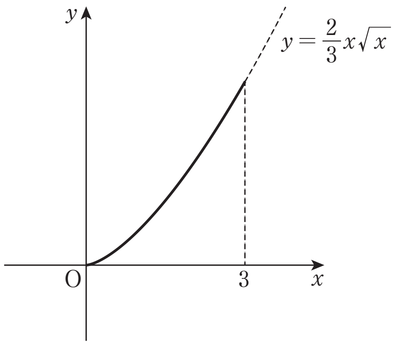
とおくと　$\dfrac{dx}{dt}=$　，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{}\cdot\dfrac{}{dt}=\dfrac{dy}{dx}=$　　より，次のように表される。

曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$　$(a \leqq x \leqq b)$の長さを L とすると

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

(ex) 曲線 $y=\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$　$(0 \leqq x \leqq 3)$の長さ L を求める。



$y=\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ より　$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x}$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+(\sqrt{x})^2=1+x$$

$$L=\int_0^3\sqrt{1+x}\,dx=\left[\frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=\frac{14}{3}$$

1 (1) アステロイド $x=\cos^3 t$, $y=\sin^3 t$ $\left(0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}\right)$ の長さを求めよ。

(2) カテナリー $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ の長さを求めよ。

Point Pickup

媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$, $y=g(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ の長さを L とすると

$$L=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt$$

曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ の長さを L とすると

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$

第22講 PART1 確認問題

1 次の曲線の長さを L とする。

$$x=t-\sin t,\ y=\cos t \quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

このとき，$L=\int_0^{2\pi}$ ア dt と表される。

よって，$L=$ イ である。

ア は下の①～④のうちから選べ。

① $\sin t$　② $\sin\frac{t}{2}$

③ $2\sin\frac{t}{2}$　④ $2\cos\frac{t}{2}$

2 曲線 $y=2x^{\frac{3}{2}}\left(0\leqq x\leqq\frac{1}{3}\right)$ の長さを L とすると，

$L=\int_0^{\frac{1}{3}}$ ウ dx と表される。

よって，$L=\dfrac{\text{エオ}}{\text{カキ}}$ である。

ウ は下の①～④のうちから選べ。

① $1+3x$　② $1+9x$

③ $\sqrt{1+3x}$　④ $\sqrt{1+9x}$

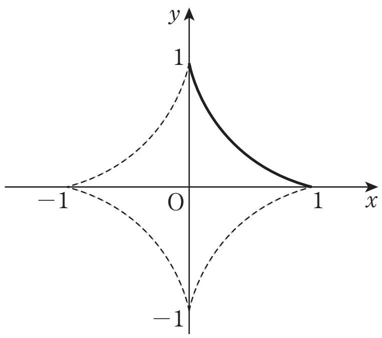
第22講 曲線の長さ，速度と道のり

PART1 曲線の長さ

1 (1) アステロイド $x=\cos^3 t$，$y=\sin^3 t$ $\left(0\leqq t\leqq \frac{\pi}{2}\right)$ の長さを求めよ。

(2) カテナリー $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ の長さを求めよ。

[解答]



(1) $\frac{dx}{dt}=-3\cos^2 t\sin t$，$\frac{dy}{dt}=3\sin^2 t\cos t$ より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=(-3\cos^2 t\sin t)^2+(3\sin^2 t\cos t)^2$$

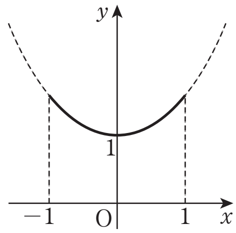
$$=9\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t)$$

$$=(3\sin t\cos t)^2=\left(\frac{3}{2}\sin 2t\right)^2$$

$0\leqq 2t\leqq \pi$ より $\sin 2t\geqq 0$

よって，求める曲線の長さ L は

$$L=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\left(\frac{3}{2}\sin 2t\right)^2}\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{2}\sin 2t\,dt=\frac{3}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}$$



(2) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ より

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2=\frac{(e^x+e^{-x})^2}{4}$$

よって，求める曲線の長さ L は

$$L=\int_{-1}^{1}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx=\int_{-1}^{1}\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=2\int_0^1\frac{e^x+e^{-x}}{2}dx=\left[e^x-e^{-x}\right]_0^1=e-\frac{1}{e}$$

第22講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③，イ：8

[解説]

$$\frac{dx}{dt}=1-\cos t$$

$$\frac{dy}{dt}=-\sin t$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2&=(1-\cos t)^2+(-\sin t)^2\\&=1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t\\&=2(1-\cos t)\\&=4\cdot\frac{1-\cos t}{2}\quad\text{[A]}\\&=4\sin^2\frac{t}{2}\end{aligned}$$

[A]　2 倍角の公式

$$\sin^2\frac{t}{2}=\frac{1-\cos t}{2}$$

$0\leqq\frac{t}{2}\leqq\pi$ より，$\sin\frac{t}{2}\geqq 0$

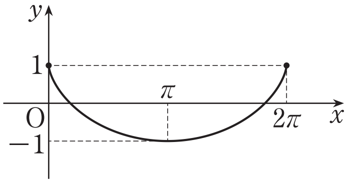
よって，

$$\begin{aligned}L&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\quad\text{[B]}\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt\\&=\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\,dt\\&=\left[-4\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}\\&=-4(-1-1)\\&=8\end{aligned}$$

[B]　媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$，$y=g(t)$ $(a\leqq t\leqq b)$ の長さを L とすると，

$$\begin{aligned}L&=\int_a^b\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt\\&=\int_a^b\sqrt{\{f'(t)\}^2+\{g'(t)\}^2}\,dt\end{aligned}$$



2

[正解] ウ：④，エオ：14，カキ：27

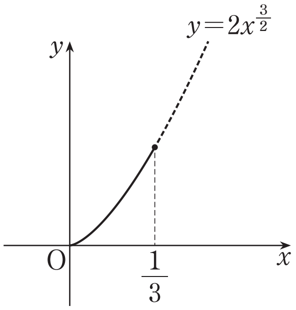
[解説]

$\dfrac{dy}{dx}=3x^{\frac{1}{2}}$ より，

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+\left(3x^{\frac{1}{2}}\right)^2$$
$$=1+9x$$

よって，

$$L=\int_0^{\frac{1}{3}}\sqrt{1+9x}\,dx \quad \text{[C]}$$
$$=\int_0^{\frac{1}{3}}(9x+1)^{\frac{1}{2}}dx$$
$$=\left[\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}(9x+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{1}{3}}$$
$$=\frac{2}{27}(8-1)$$
$$=\boldsymbol{\frac{14}{27}}$$



[C]　曲線 $y=f(x)$ の長さ
曲線 $y=f(x)$ $(a\leqq x\leqq b)$ の長さを L とすると，
$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$
$$=\int_a^b\sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$$